# INTERROGATION DE PYTHON N°7

**EXERCICE** **10 points**

Soit $G$ un graphe orienté de sommet $\{s_1, ..., s_n\}$.
On rappelle que si $M$ désigne la matrice d'adjacence de $G$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, le coefficient d'indice $(i, j)$ de la matrice $M^p$ représente le nombre de chaînes de longueur $p$ reliant le sommet $s_i$ au sommet $s_j$ (dans cet ordre).

1. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Donner une représentation graphique de ce graphe. On notera `A,B,C` les sommets du graphe.

   (b) Déterminer le nombre de chaînes de longueur 2 dans ce graphe. *On pourra en faire la liste.*

   (c) Déterminer la matrice $M^2$ et expliquer comment retrouver le résultat précédent à l'aide de cette matrice.

2. (a) On rappelle que la commande `np.linalg.matrix_power(M,p)` renvoie la matrice $M^p$ et que la commande `np.sum(A)` renvoie la somme de tous les coefficients de la matrice $A$.
   On écrit les lignes de commandes suivantes et on obtient en sortie les résultats ci-dessous :

```
In [24]: M=np.array([[0,1,1],[1,0,1],[1,1,0]])
    ...: p=4
    ...: A=np.linalg.matrix_power(M,4)
    ...: print(A,',',A[1,1],',',np.sum(A))
[[6 5 5]
 [5 6 5]
 [5 5 6]] , 6 , 48
```

   Comment interpréter ces résultats dans le langage de la théorie des graphes et plus précisément dans le cadre du graphe $G$ précédent ?

   ...................................................................................................................................................

   ...................................................................................................................................................

(b) On dit qu'une chaîne est un cycle si le sommet final de la chaîne est égal au sommet initial. D'après le résultat précédent, combien y-a-t-il de cycle de longueur 4 dans ce graphe ? *On ne demande pas de justification.*

........................................................................................................................................................

(c) Que diriez vous de la probabilité qu'une chaîne de longueur 4 dans ce graphe soit un cycle ? *Comparer cette probabilité à* $\frac{1}{2}$.

........................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................

3. (a) Rappeler la définition d'un graphe connexe et donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice d'adjacence du graphe pour qu'il soit connexe.

........................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................

(b) On rappelle que la commande `np.min(A)` renvoie le minimum des coefficients de la matrice $A$.
On considère la fonction suivante :

```python
def fonction(M):
  p=0
  A=np.linalg.matrix_power(M,p)
  while np.min(A) == 0 and p<len(M):
    i+=1
    A=A+np.linalg.matrix_power(M,p)
  if np.min(A) > 0 :
    return 1
  else:
    return 0
```

Expliquer dans le langage de la théorie des graphes le rôle de la fonction ci-dessus.
*Justifier votre réponse.*

........................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................

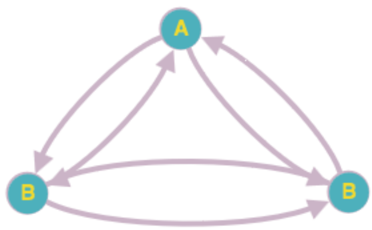
# INTERROGATION PYTHON N°7 : CORRECTION

**EXERCICE** **10 points**

Soit $G$ un graphe orienté de sommet $\{s_1, ..., s_n\}$.
On rappelle que si $M$ désigne la matrice d'adjacence de $G$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, le coefficient d'indice $(i, j)$ de la matrice $M^p$ représente le nombre de chaînes de longueur $p$ reliant le sommet $s_i$ au sommet $s_j$ (dans cet ordre).

1. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Donner une représentation graphique de ce graphe. On notera `A`,`B`,`C` les sommets du graphe.




   (b) Déterminer le nombre de chaînes de longueur 2 dans ce graphe. *On pourra en faire la liste.*
   Il y a 12 chaînes de longueurs 2 dans ce graphe : $\{ABA, ACA, BAB, BCB, CAC, CBC, ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA\}$.

   (c) Déterminer la matrice $M^2$ et expliquer comment retrouver le résultat précédent à l'aide de cette matrice.
   $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Les coefficients de $M^2$ donnent le nombre de chaines de longueur de 2 reliant toutes les paires de sommets du graphe. On en compte 12 en faisant la somme des coefficients de cette matrice.

2. (a) On rappelle que la commande `np.linalg.matrix_power(M,p)` renvoie la matrice $M^p$ et que la commande `np.sum(A)` renvoie la somme de tous les coefficients de la matrice $A$.
   On écrit les lignes de commandes suivantes et on obtient en sortie les résultats ci-dessous:

```
In [24]: M=np.array([[0,1,1],[1,0,1],[1,1,0]])
    ...: p=4
    ...: A=np.linalg.matrix_power(M,4)
    ...: print(A,',',A[1,1],',',np.sum(A))
[[6 5 5]
 [5 6 5]
 [5 5 6]] , 6 , 48
```

   Comment interpréter ces résultats dans le langage de la théorie des graphes et dans le cadre du graphe $G$ précédent ?
   On obtient en sortie : la matrice $M^4$, le coefficient $(1, 1)$ de la matrice $M^4$ et la somme des coefficients de cette matrice.
   Dans le langage des graphes on peut dire qu'il y a donc 6 chaînes de longueur 4 reliant le sommet B à lui-même et 48 chaînes de longueurs 4 dans ce graphe.

   (b) On dit qu'une chaîne est un cycle si le sommet final de la chaîne est égal au sommet initial.
   D'après le résultat précédent la matrice $A^4 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ on dénombre ainsi $3 \times 6 = 18$ cycles de longueurs 4 en faisant la somme des éléments diagonaux de cette matrice.

   (c) Que diriez vous de la probabilité qu'une chaîne de longueur 4 choisie au hasard dans ce graphe soit un cycle ? Comparer à $\frac{1}{2}$.
   Sur les 48 chaînes de longueurs 4 du graphe $G$ il n'y en que 18 qui sont des cycles. Ainsi la probabilité qu'une chaîne de ce graphe soit un cycle est $\dfrac{18}{48} = \dfrac{6}{16} < \dfrac{1}{2}$.

3. (a) Rappeler la définition d'un graphe connexe.
   Un graphe est connexe lorsque deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne du graphe.

(b) On rappelle que la commande `np.min(A)` renvoie le minimum des coefficients de la matrice $A$.
On considère la fonction suivante :

```
def fonction(M):
  p=0
  A=np.linalg.matrix_power(M,p)
  while np.min(A) == 0 and p<len(M)::
    p+=1
    A=A+np.linalg.matrix_power(M,p)
  if np.min(A) > 0 :
    return 1
  else:
    return 10
```

La fonction précédente teste si un graphe est connexe ou non et renvoie 1 si le graphe est connexe et 0 sinon.

En effet, au départ on a $A = I_n$ puisque $p = 0$ et que $M^0 = I_n$ où $n$ est la taille de la matrice $M$.

La condition `np.min(A)==0` signifie qu'il y a un coefficient nul dans la matrice $A$.

La condition de la boucle WHILE est donc "tant que qu'il y a un coefficient nul dans la matrice $M^p$ et que $p < n$ " alors :

• on incrémente $p$ de 1

• on remplace $A$ par $A + M^p$.

Lorsque la boucle WHILE est terminée on teste si `np.min(A) > 0` ou non :

• si `np.min(A) > 0` cela signifie que tous les coefficients de `A` sont non nuls. Or vu les calculs faits dans la boucle WHILE `A` $\leftarrow$ `A+M`$^p$, dans la variable `A` on a donc une matrice $I_n + M + ... + M^p$ avec $p < n$. Ceci implique donc que tous les coefficients de la matrice $I_n + M + ... + M^{n-1}$ sont non nuls.

Dans ce cas la fonction renvoie la valeur 1 ce qui correspond au cas où le graphe est connexe d'après le rappel de cours précédent.

• sinon on a `np.min(A)==0` puisque texttt A est à coefficient positifs (ou nuls). Dans ce cas la variable `p` aura pris toutes les valeurs `p<n` et donc la variable `A` contiendra au moins un coefficient nul. Or toujours d'après les affectations `A` $\leftarrow$ `A+M`$^p$ la variable `A` continent la matrice $I_n + M + ... + M^{n-1}$ qui contient elle-même au moins un élément nul. Dans ce cas la fonction renvoie la valeur 0 ce qui correspond au cas où le graphe n'est pas connexe d'après le rappel de cours précédent.